Elektronendiffractie

Inhoudsopgave

1 Inleiding

In de klassieke natuurkunde bestaat een hard onderscheid tussen materie (deeltjes) als atomen en elektronen, en golven als licht. De quantummechanica dwingt ons dit onderscheid los te laten en te accepteren dat van een object onder bepaalde omstandigheden het golfkarakter en onder andere omstandigheden juist het deeltjeskarakter op de voorgrond treden. Het doel van dit experiment is om uit het buigingspatroon (een golffenomeen!) van elektronen die bij hoge snelheid invallen op een kristalrooster de materiegolflengte van de elektronen af te leiden.

2 Theorie

Om je goed voor te bereiden op het experiment wordt eerst de theorie bestudeerd.
De ontwikkelingen in de scheikunde (o.a. het ontwerp van het periodiek systeem), de ontdekking van het elektron en de ontrafeling van de atoomstructuur eind 19e eeuw leidden natuurkundigen tot het idee dat materie op atomaire schaal moest worden opgevat als microscopische “deeltjes” met bijbehorend mechanisch gedrag (b.v. botsingen, krachtenwerking). Iets heel anders was licht, dat volgens de elektromagnetische theorie van Maxwell moest worden gezien als een golfverschijnsel.

In de vroege 20e eeuw werd echter duidelijk dat licht uit ”pakketjes” energie (fotonen) bestaat. Het foto-elektrisch effect (vrijmaken van elektronen door licht) en het Compton-effect (niet-elastische botsing van licht met elektronen) konden hiermee verklaard worden. Op basis van elementen uit de (speciale) relativiteitstheorie (zie de Appendix) stelde Louis de Broglie dat deeltjes niets anders zijn dan zeer gelokaliseerde (energie)pakketjes, die daarom -mits in de juiste omstandigheden gebracht- ook een golfkarakter kunnen vertonen.

Het bewijs voor het golfkarakter van elektronen en de geldigheid van de hypothese van De Broglie werd geleverd door elektronen sterk te versnellen en daarna op een kristalrooster te schieten. Het blijkt dat achter het kristal dan buigingspatronen worden waargenomen, zoals je die misschien kent van röntgenstraling die op een kristalrooster invalt (Bragg-verstrooiing) of zichtbaar licht dat op een tralie of een CD invalt. Tegenwoordig wordt dit effect gebruikt in transmissie-elektronmicroscopie (TEM) als techniek om de atomaire structuur van materialen te onderzoeken. In dit experiment bekijk je zelf het buigingspatroon van elektronen, en bepaal je hieruit de golflengte van de elektronen.

2.1 Impuls en de materie-golflengte

Mogelijk is de fysische grootheid impuls op de middelbare school reeds behandeld. Impuls is belangrijk in de natuurkunde omdat het de grootheid is die verandert als er op een object een kracht wordt uitgeoefend. Voor een object met massa m en snelheid v wordt de impuls p gegeven door $p = mv$.

De Broglie liet op basis van de speciale relativiteitstheorie zien dat de impuls van een foton gegeven wordt door

$$p = h/\lambda. \tag{1}$$

Hier is h de constante van Planck, en λ de golflengte van het foton (licht). In de Appendix kun je nalezen hoe een massaloos object als het foton toch een impuls kan hebben. De Broglie liet vervolgens zien dat voor objecten met massa de klassieke uitdrukking voor de impuls gebruikt kan worden om een zogenaamde materie-golflengte te berekenen (mits de snelheid van het object niet te dicht bij de lichtsnelheid ligt).

2.2 Elektronen versnellen

Zoals je in verkennende berekeningen in opgave 1 en 2 zult zien, moet een licht object als het elektron een hoge snelheid krijgen om golfgedrag te vertonen. Omdat een elektron een geladen deeltje is, ligt het voor de hand om het te versnellen door middel van een spanningsverschil. De potentiële energie die vrijkomt als een elektron met lading e een spanningsverschil V ondergaat is e V.

Opdracht 1: Impuls en materiegolflengte 1. Geef allereerst een voorbeeld van een fysische situatie waarin een elektron zich manifesteert als deeltje.
2. Geef een uitdrukking voor de materiegolflengte van een deeltje met massa m op basis van de klassieke uitdrukking voor de impuls.
3. Geef een uitdrukking voor de (niet direct meetbare) snelheid v van een elektron dat versneld wordt door een spanningsverschil V. Substitueer dit resultaat in de uitdrukking bij b. om de uitdrukking $\lambda = h/\sqrt{2meV}$ te verkrijgen.
4. Bereken ter illustratie de snelheid v van een elektron dat versneld wordt met een spanning V= 3 kV, en de impuls p en de golflengte λ van het elektron in dat geval.

2.3 Meetprincipe

Diffractie

De materiegolflengte-hypothese van De Broglie is experimenteel te controleren door na te gaan of bij materiedeeltjes zoals elektronen golfverschijnselen optreden. Diffractie is zo'n typisch golfverschijnsel. Wanneer zichtbaar licht oftewel elektromagnetische straling op een object invalt, zal aan de randen van het object afbuiging of diffractie plaatsvinden. Dit is een demonstratie van het golfkarakter van licht. Bij inval op een tralie zal onder zekere hoeken een hoge lichtintensiteit worden waargenomen, die ontstaat doordat de bijdragen uit opeenvolgende tralieopeningen voor die hoeken constructief interfereren. Deze hoeken hangen samen met de golflengte van het licht.

Bragg-verstrooiing

Voor röntgenstraling kan men ook diffractie waarnemen. De golflengte van röntgenstraling is echter typisch 0.1 nanometer, een factor 1000 kleiner dan die van zichtbaar licht. Een kristalrooster kan in dat geval goed dienst doen als tralie. Men spreekt dan vaak van Bragg-verstrooiing. De regelmatige structuur van de atomen in het kristal zorgt dan voor de constructieve interferentie. De eenvoudige (maar niet helemaal complete) interpretatie is geschetst in Figuur 1. Bij een gegeven golflengte zal een kristal onder bepaalde invalshoeken dus werken als een spiegel.

Opdracht 2: Diffractie en de wet van Bragg

Beantwoord de volgende vragen

a) Zoek in je natuurkundeboek of elders informatie over de werking van een tralie en over Bragg-verstrooiing.

b) Laat met behulp van de schets in Figuur 1 zien dat de bijdragen die reflecteren op opeenvolgende kristalvlakken constructief interfereren als de wet van Bragg

$$2d\sin(\theta) = n\lambda \tag{2}$$

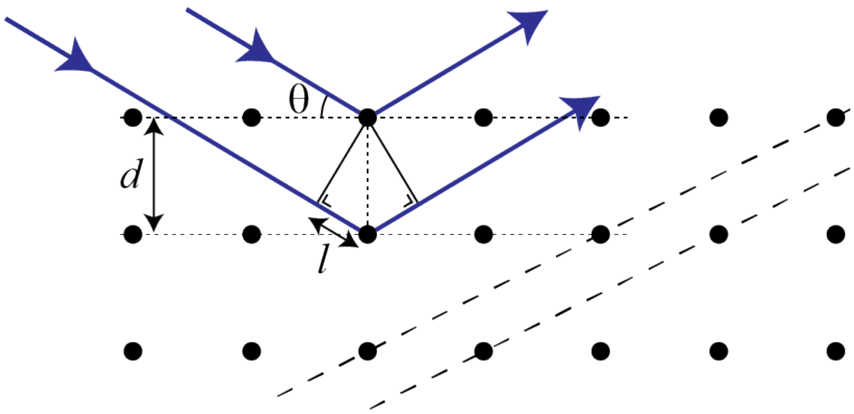
geldt. Hier is d de afstand tussen de kristalvlakken en θ de hoek waaronder de golven invallen. Hint: bereken eerst de weglengte l, en geef vervolgens aan hoe 2l relateert aan de golflengte λ. Het gehele getal n wordt wel de orde van het diffractiemaximum genoemd. Leg uit wat het verschil is tussen een diffractiemaximum bij n=1 en n=2.

c) Laat zien dat er alleen Bragg-verstrooiing optreedt wanneer $n\lambda \leq 2d$. Daarom lukt het dus niet om met zichtbaar licht dit experiment te doen.

De materiegolf-hypothese is kwalitatief te toetsen door materiedeeltjes zoals elektronen te laten invallen op een kristalrooster. Het optreden van diffractie is dan een bewijs voor het golfkarakter van de elektronen. De verstrooiingshoeken bevatten via de wet van Bragg informatie over de golflengte van de elektronen. Hiermee kan de hypothese ook kwantitatief getoetst worden.

Bragg-verstrooiing aan grafiet

In dit experiment wordt grafiet gebruikt om aan te verstrooien, dit is een hexagonale structuur van koolstofatomen. Figuur 2 a) toont een deel van het kristal. Het "wondermateriaal" grafeen dat recent veel in het nieuws is, is één laagje van dit grafiet. De



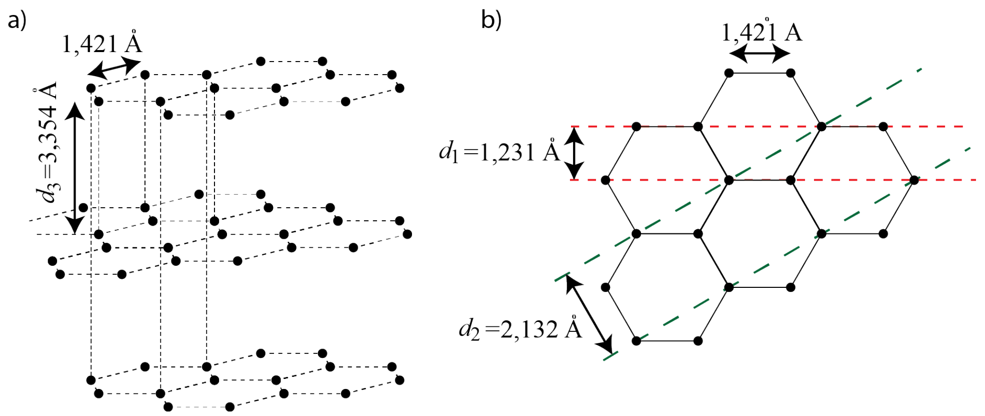
Figuur 1: Schets van Bragg-verstrooiing in een tweedimensionaal, vierkant kristalrooster met roosterafstand d. In het kristal zijn kristalvlakken te herkennen: vlakken waarin op regelmatige afstanden atomen (zwarte bolletjes) liggen. Deze kristalvlakken kun je opvatten als deels reflecterende vlakken ("spiegels"). In blauw zijn golfpaden weergegeven die invallen onder hoek θ. Reflecties afkomstig van opvolgende kristalvlakken zullen constructief interfereren als het weglengteverschil $2l$ een geheel aantal golflengtes (n keer λ) is.
Let op! Hoewel het verleidelijk is om alleen de "hoofdassen" (horizontaal en verticaal) als kristalvlakken te zien, zijn er oneindig veel "vlakken" te definiëren, elk met eigen onderlinge afstand. Met de lange stippellijnen is een voorbeeld geschetst.

afstand tussen twee vlakken is $d_3 = 3,354 \cdot 10^{-10} m$. De kristalvlakken in het hexagonale vlak waarvan in dit experiment een zichtbare diffractie afkomstig is, zijn met stippellijnen aangegeven in Figuur 2 b). Het is een aardige oefening in meetkunde om te laten zien dat de afstanden tussen de vlakken gelijk zijn aan $d_1 = 1,231 \cdot 10^{-10} m$ en $d_2 = 2,132 \cdot 10^{-10} m$. Het dunne grafietfolie waaraan verstrooiing plaatsvindt, is niet één (perfect) kristalrooster. Het is een verzameling hele kleine kristalletjes, die ten opzichte van elkaar willekeurig georiënteerd liggen. Het grote voordeel hiervan is dat het eenvoudiger wordt om een diffractiepatroon waar te nemen
In Figuur 3 is de geometrie van het experiment weergegeven. De elektronen naderen het grafietfolie als een evenwijdige bundel. Veel van de kleine kristallen in het grafietfolie zullen zo liggen dat niet voldaan wordt aan de wet van Bragg; maar omdat er altijd wat kristalletjes te vinden zijn die wel goed liggen, zal er altijd diffractie optreden.
De relevante kristalvlakken liggen onder een hoek θ ten opzichte van de invallende bundel, de verstrooide elektronen (die voor de duidelijkheid dus door de zeer dunne folie heen gaan) maken dus een hoek 2θ met de invallende bundel. We weten dat

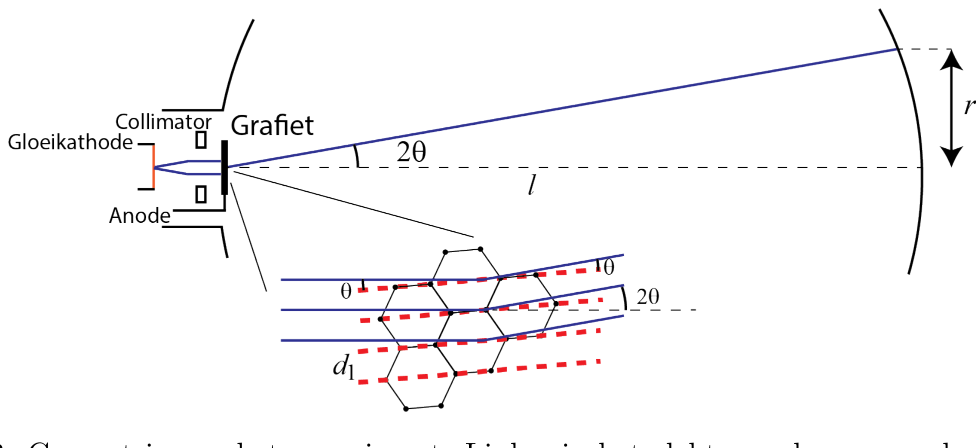
$$\tan(2\theta) = r/l \tag{3}$$

zoals weergegeven in figuur 1. We maken nu gebruik van het gegeven dat $2\sin(\theta) \approx \tan(2\theta)$ (zie de Appendix voor een korte bespreking van de effecten van deze benadering) en vergelijking 2 om af te leiden dat

$$d\frac{r}{l} = n\lambda \tag{4}$$



Figuur 2: a) Kristalrooster van grafiet. Elk zwart bolletje is een koolstofatoom. In de (horizontale) vlakken liggen de atomen op een relatief kleine afstand van $1.421 \cdot 10^{-10} m$; de afstand tussen de vlakken is met $d_3 = 3,354 \cdot 10^{-10} m$ relatief groot. b) Hexagonaal rooster van één laagje grafiet. Met rode en zwarte stippellijnen zijn de kristalvlakken waaraan meetbare Bragg-verstrooiing plaatsvindt weergegeven. De afstanden tussen die $d_1 = 1,231 \cdot 10^{-10} m$ en $d_2 = 2,132 \cdot 10^{-10} m$.



Figuur 3: Geometrie van het experiment. Links: in het elektronenkanon worden elektronen vrijgemaakt door verhitting van een kathode. Met enkele tussenliggende elektroden wordt de elektronenbundel min of meer evenwijdig gemaakt. Het plaatje grafiet ligt op de anode. In het grafiet zijn sommige kristallen (onder een voorbeeld uitvergroot) zo georiënteerd dat aan de wet van Bragg Vgl. 2 wordt voldaan. Ten opzichte van de inkomende bundel maakt de vertrekkende elektronenbundel een hoek 2θ. Rechts: de elektronen komen aan op de wand van de vacuümbuis en zorgen op een afstand r van de rechtdoorgaande bundel voor fluorescentie. Deze fluorescentie kan met het oog worden waargenomen.

Opdracht 3: Bragg-verstrooiing aan grafiet
Beantwoord de volgende vragen:

a) Verklaar waarom in het waarnemingsvlak (een fluorescerend scherm) de diffractiemaxima te zien zijn als concentrische cirkels (Hint: kristallen kunnen ook gedraaid liggen ten opzichte van de doorsnede getekend in Figuur 3), en waarom het op deze manier mogelijk wordt om meerdere diffractiemaxima tegelijk waar te nemen.

b) Een rekenvoorbeeld voor $3kV$, waarvoor je bij opgave 1 al de golflengte hebt bepaald. De afstand tussen het kristal en het waarneemvlak (fluorescerend scherm) is gelijk aan $l = 13.5cm$. Gegeven de afstanden d_1, d_2 en d_3 tussen de verschillende vlakken, bij welke stralen r_1, r_2 en r_3 verwacht je een orde $n = 1$ diffractiemaximum te zien?

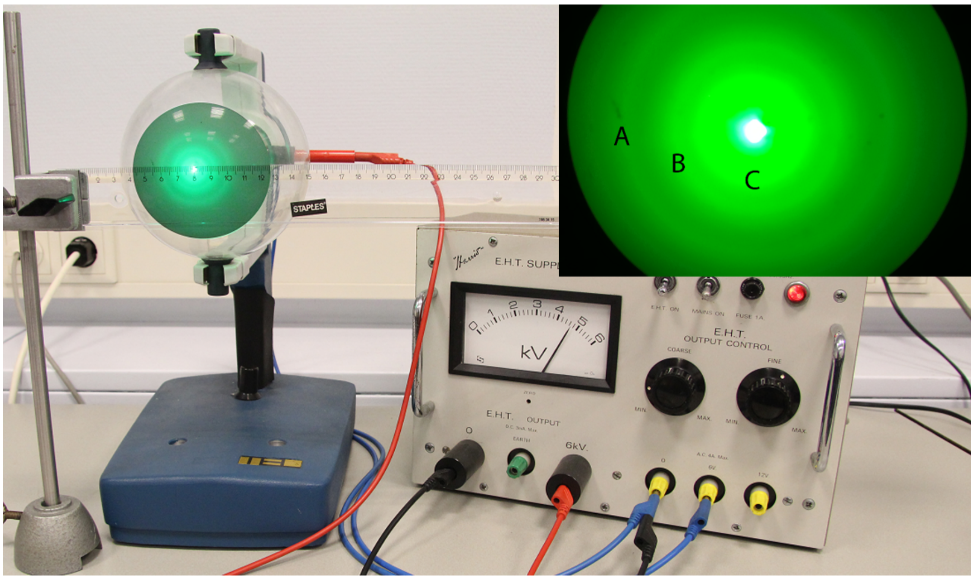
3 Verkennen opstelling

Je gaat nu aan de slag met de opstelling waarbij je eerst zal lezen over hoe de opstelling werkt en daarna een aantal proefmetingen zal uitvoeren. Op deze manier begrijp je goed hoe de opstelling werkt. Daarna ga je, op basis van deze kennis, het werkplan opstellen.

3.1 De opstelling

Figuur 4 is een foto van de elektronendiffractiebuis (links) en de hoogspanningsvoeding (rechtsonder).De voeding (E.H.T. SUPPLY UNIT) voedt twee onderdelen. Er wordt een 6 V spanning op de gloeikathode gezet (zie ook Figuur 3), en er wordt een variabele hoogspanning gezet over de kathode en anode. Deze onderdelen bevinden zich aan de achterzijde van de elektronendiffractiebuis. De bundel elektronen valt op een klein metalen draadrooster waarop een dunne laag grafietfolie zit.

Het mat-witte vlak dat op de voorzijde van de elektronendiffractiebuis is een fluorescerend materiaal. Wanneer het geraakt wordt door elektronen, dan zal het groen oplichten. Zie ook de foto rechtsboven in Figuur 4, die is gemaakt bij een versnelspanning van 3 kV. Met een liniaal op standaard kunnen de stralen van de diffractieringen worden bepaald. In het experiment zijn alleen de $n = 1$ diffractiemaxima te zien; de intensiteiten van de hogere orde maxima zijn veel lager . Verder is de binnenste diffractiering over het algemeen het lastigst te meter. De diffractieringen zijn redelijk breed vanwege de eindige afmetingen van de elektronenbundel en (waarschijnlijk) de niet helemaal perfecte collimatie. Omdat de lichtsterktes over het algemeen laag zijn, moeten de metingen in het donker worden uitgevoerd. Bij de opstelling staat een bureaulampje dat kan helpen bij het aflezen van de liniaal.
De elektronendiffractiebuis is een vrij kwetsbaar en relatief duur onderdeel van de meetopstelling. Probeer deze niet nodeloos aan te stoten!



Figuur 4: Meetopstelling. Links zie je de elektronendiffractiebuis met een liniaal voor metingen. De elektronendiffractiebuis is een bolvormige vacuümbuis met een elektronenkanon, een kristalrooster en een fluorescerend scherm. Rechts staat de hoogspanningsvoeding. De blauwe draden zijn aangesloten op de gloeikathode, waaruit elektronen worden vrijgemaakt. Met de E.H.T. OUTPUT CONTROL wordt de versnelspanning V ingesteld. Er zijn twee knoppen, één voor grove instelling en één voor fijninstelling. Rechtsboven zie je een foto van het diffractiepatroon bij 3 kV. De zichtbare diffractieringen zijn aangeduid met A, B en C.

Opdracht 4: Verkennende vragen opstelling

Beantwoord de volgende vragen:

a) Is de anode of de kathode de positieve elektrode? Waarom?

b) Met A, B en C zijn in de foto in Figuur 4 drie diffractieringen aangeduid. Deze ringen zijn afkomstig van de kristalvlakken met afstanden d_1 t/m d_3 die in Figuur 3 zijn aangegeven en in opgave **??** zijn besproken. Welke ring correspondeert met welk vlak?

c) Wat is de lichte stip in het centrum van de diffractieringen?

Hoogspanning en veiligheid
De mogelijk grote stromen die met een hoogspanning gepaard gaan, zijn potentieel gevaarlijk. Omdat in het lichaam de aansturing van spieren met behulp van elektrische stroompjes gebeurt, kunnen de effecten van minimale stromen al gevaarlijk zijn. Het is dus belangrijk om veilig met de hoogspanning om te gaan.

- Maak de versnelspanning V over het elektronenkanon niet groter dan 5 kV.
- Aanzetten van de hoogspanningsvoeding gaat als volgt: eerst de schakelaar MAINS ON omzetten, enige seconden wachten, vervolgens de schakelaar E.H.T. ON omzetten. Dit geeft het apparaat enige tijd om op te warmen.
- Draai de hoogspanning altijd rustig omhoog en omlaag, en wacht tot eventuele insteleffecten voorbij zijn.
- Draai de hoogspanning altijd terug naar 0 voordat je de opstelling uitzet en/of verlaat.
- *En het belangrijkste: gebruik van vloeistoffen (drinken) bij de opstelling is* ***ten strengste verboden!***

3.2 Proefmeting

Opdracht 5: Verkennende metingen
Je gaat nu een proefmeting doen.

a) Zet de hoogspanningsvoeding aan, en stel de versnelspanning in op 3 kV waarvoor je al enkele verkennende metingen hebt gedaan. Kijk of je de kathode kunt zien gloeien. Vergelijk het diffractiepatroon met dat wat je ziet in Figuur 4.
b) Hoe kun je het best de straal van de ring meten? Moet hiervoor de binnenrand van de ring gemeten worden, de buitenrand of ertussenin? Verklaar je keuze.
c) Meet de stralen van de drie ringen bij deze spanning en vergelijk met de bij opgave 3 berekende waarden.
d) Ga na hoe de straal van de diffractiemaxima verandert afhankelijk van de waarde van de versnelspanning V. Verklaar het kwalitatieve verband tussen V en r.

4 Onderzoeksvragen en werkplan

Na de theoretische voorbereiding en het verkennen van de opstelling kun je nu de onderzoeksvraag en een werkplan op te stellen.

Opdracht 6: Onderzoeksvragen
Formuleer de onderzoeksvraag die je met deze opstelling wilt beantwoorden. Ge-

bruik hiervoor de kennis die je hebt opgedaan in de voorbereiding. Je moet de onderzoeksvraag kunnen beantwoorden met deze opstelling. Stel voor de onderzoeksvraag een hypothese op. De hypothese is wat je verwacht dat het antwoord zal zijn op de onderzoeksvraag.

Opdracht 7: Werkplan
Stel nu het werkplan op waarin in ieder geval de volgende punten behandeld worden:

- De onderzoeksvraag en hypothese.
- De grootheden die gevarieerd worden.
- De grootheden die gemeten worden en hoe deze metingen gedaan worden.
- Het aantal metingen.
- Hoe de data weergegeven wordt.

Laat het werkplan controleren voordat je verder gaat.

5 Metingen

Nadat je de voorbereiding hebt uitgevoerd en het werkplan is goedgekeurd door de docent of assistent, kan je het experiment gaan uitvoeren.

Opdracht 8: Metingen
Zoek met behulp van de meetopstelling volgens je werkplan een antwoord op de onderzoeksvraag en controleer de opgestelde hypothese.

- In het experiment kun je ervoor kiezen voor één ring een en meerdere spanningen te meten, voor alle ringen en wat minder spanningen, of meerdere herhalingsmetingen bij één enkele spanning. Bedenk zelf wat (voor jou) het beste werkt en leg uit waarom je voor die opzet kiest. Houd rekening met de beschikbare tijd.
- Hoe meet je nauwkeurig de stralen, en welke onzekerheid moet je aan de meetwaarden toekennen?
- Welke stappen zijn noodzakelijk om de gemeten stralen om te werken tot een golflengte?
- in welke vorm rapporteer je je resultaten op een zo overtuigend mogelijke wijze (getal, berekening, tabel, grafiek)?

6 Rapportage

Afhankelijk van wat je docent van je verwacht rapporteer je met een schriftelijk verslag of een presentatie over het onderzoek. Zorg ervoor dat in dit verslag of deze presentatie de volgende onderdelen duidelijk naar voren komen:

- De onderzoeksvraag en hypothese.
- Een beschrijving en een uitleg van de werking van de meetopstelling.
- Grafische weergave van de meetresultaten.
- Verwerking en interpretatie van de meetresultaten.
- Het antwoord op de onderzoeksvraag verkregen door de meetresultaten.

Opdracht 9: Discussie
Bespreek nadat je de materiegolflengte van het elektron experimenteel bepaald uit de diffractieringen in een korte discussie tenminste de volgende punten:

- hoe nauwkeurig zijn de bepaalde golflengtes?
- hoe vergelijken de bepaalde waarden met de hypothesen? Zijn er systematische verschillen?
- Zijn er verbetermogelijkheden in de gevolgde methodiek. Welke grootheden moeten bijvoorbeeld nauwkeuriger worden gemeten? Vergelijk de theoretisch en de experimenteel bepaalde waarden van de materiegolflengte van het elektron. Hoe groot is de afwijking (in %) tussen de theoretisch en de experimenteel bepaalde waarden van λ?

Appendix

Speciale relativiteitstheorie, energie en impuls

Einstein leidde uit de speciale relativiteitstheorie af dat de relativistische energie van een object gegeven wordt door

$$E = \sqrt{(m_0^2 c^4 + p^2 c^2}.$$

Hier is p de impuls van het object, c de lichtsnelheid en m_0 de zogenaamde rustmassa (de massa die het object heeft als het in rust is). Controleer zelf dat de energie van een object in rust gelijk is aan de rustenergie $E = m_0 c^2$, een uitdrukking die je ongetwijfeld zult kennen. Een object in beweging heeft ook nog een kinetische bijdrage aan de energie. Je kunt laten zien dat bij lage snelheden die kinetische energie gelijk is aan de klassieke kinetische energie $1/2 m_0 v^2$.

Een foton heeft geen massa, maar blijkens bovenstaande uitdrukking wel kinetische energie, en daarom ook een impuls. Verifieer zelf dat $E = \frac{hc}{\lambda} = pc$, waarmee de uitdrukking voor de impuls uit Sectie 1 wordt gevonden.

Benadering van $\sin(\theta)$ en $\tan(2\theta)$ voor kleine hoeken θ.

In de afleiding van Vgl. (4) hebben we gebruik gemaakt van de z.g. kleine-hoekbenadering voor $\sin\theta$ in Vgl. (2) en $tan(2\theta)$ in Vgl. (3). In deze paragraaf rekenen we kort uit wat de systematische afwijking is die op deze manier gemaakt wordt. Herinner je eerst dat $\tan(2\theta) = \sin(2\theta)/\cos(2\theta)$ en verder dat $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$. De exacte versie van Vgl. (4) is dus

$$\lambda = d\frac{r}{l}\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} \tag{5}$$

oftewel

$$\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} \approx 1.$$

Bij $\theta = 0$ graden is deze relatie exact, en hoe groter de hoek, hoe sterker de waarde van de breuk van 1 gaat afwijken. De afstand van het grafietfolie tot het fluorescerend scherm is (maximaal) 13,5 cm. Bij de straal van het fluorescerend scherm van 4,35 cm is de hoek 2θ 17,9 graden en de waarde van de breuk ongeveer 0,963. In de praktijk zul je geen stralen meten groter dan 2,5 cm vanwege te lage intensiteit. De hoek 2θ is dan ongeveer 10 graden en de waarde van de breuk 0,985.

Hierbij komt nog dat een tweede effect dat we niet meenemen, dat de straal wordt afgelezen op het gekromde oppervlak van de bol en niet op een vlak scherm, een systematische afwijking geeft tegenovergesteld aan de afwijking van de kleine-hoekbenadering compenseert. Ter indicatie: bij een straal van 2,5 cm wordt de correctiefactor 1,024.